

1.4.8 RILIEVO DELLA POSIZIONE SPAZIALE DI PUNTI CON SISTEMI SATELLITARI

Il sistema più diffuso attualmente è il NAVSTAR-GPS (NAVigation Satellite Timing And Ranging Global Positioning System = *sistema di posizionamento globale mediante misure di tempo e di distanza rispetto a satelliti da navigazione*) che consente di determinare le coordinate cartesiane spaziali dei punti giacenti sulla superficie terrestre, o anche la misura di distanze tra due ricevitori, mediante la ricezione di segnali emessi da satelliti artificiali orbitanti ad una quota media di circa 20180 Km.

Il sistema GPS si compone di 3 segmenti essenziali:

- **spaziale**: composto, nel suo schema attuale (dic.2009), da una costellazione di 32 satelliti (ben 8 in più dei 24 previsti) distribuiti in 6 orbite piane inclinate di 55° sul piano equatoriale ed equidistanziate in ascensione retta di 60° l'una dall'altra (fig. 1.41). Ogni satellite, ruotando attorno alla terra in circa 12^h siderali ($11^h 56'$), emette segnali continui su diverse frequenze portanti ($L_1=1575$ MHz e $L_2=1228$ MHz corrispondenti a lunghezze d'onda di circa 19 e 24 cm – recentemente è stata introdotta anche le frequenze $L_5=1176.45$ MHz). I segnali emessi contengono informazioni sulla identificazione e posizione del satellite e sull'istante di emissione della sequenza di informazioni (i satelliti sono dotati di 2 (o 3 nei SV più recenti) orologi atomici sincronizzati con il tempo ufficiale del Naval Observatory di Washington) e presentano diverse codifiche:
 - standard code (approssimata) o A/C (segnale modulato con fr. 1 Mhz $\rightarrow \lambda = 300m$);
 - precision code (di precisione) o P (segnale modulato con fr. 10 Mhz $\rightarrow \lambda = 30m$);
 - L_2C (codice per uso civile trasmesso su L_2)
 - M (militare)
 - D (Navigation Data cioè effemeridi e almanacchi)
- **di controllo**: costituito da una serie di stazioni terrestri (5 di tracking, delle quali 3 svolgono anche funzioni di trasmissione e 1 master a Colorado Springs) che rilevano il comportamento orbitale dei satelliti e ne effettuano le necessarie correzioni, sovrintendendo anche al loro funzionamento (possono variare la posizione di ciascun satellite nella propria orbita, attivare o disattivare la trasmissione dei dati, ecc.) permettendo al segmento spaziale di fornire informazioni spazio-temporali corrette in ogni istante;
- **utenza**: rappresentato dai ricevitori terrestri che, captando i segnali emessi dal segmento spaziale, provvedono alla loro interpretazione (decodifica) e alla elaborazione finale.

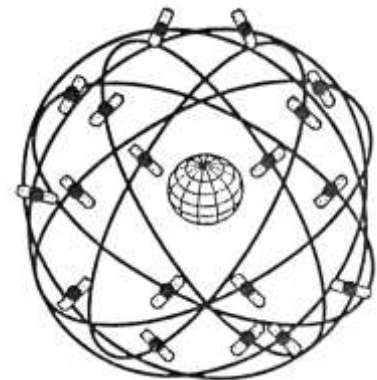


Fig. 1.41 - costellazione GPS

1.4.8.1 - Apparati riceventi

I ricevitori GPS (figg. 1.42 e 1.43) sono composti da:

- antenna con preamplificatore;
- sezione radiofrequenza (decodificatore, analizzatore di fase, ecc.);
- microprocessore con display e/o controller esterno con tastiera;
- orologio di precisione (solitamente al quarzo);
- memoria per la registrazione dei dati ricevuti;
- alimentazione elettrica.
- eventuale modem per la comunicazione tra apparati riceventi (correzione differenziale).

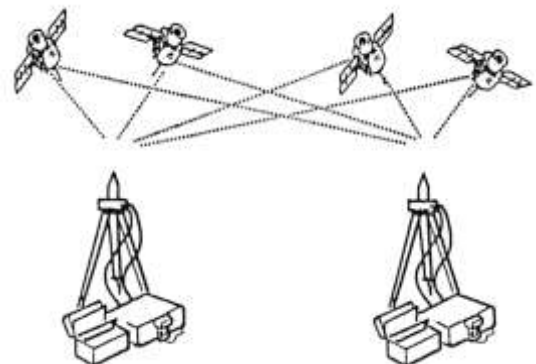
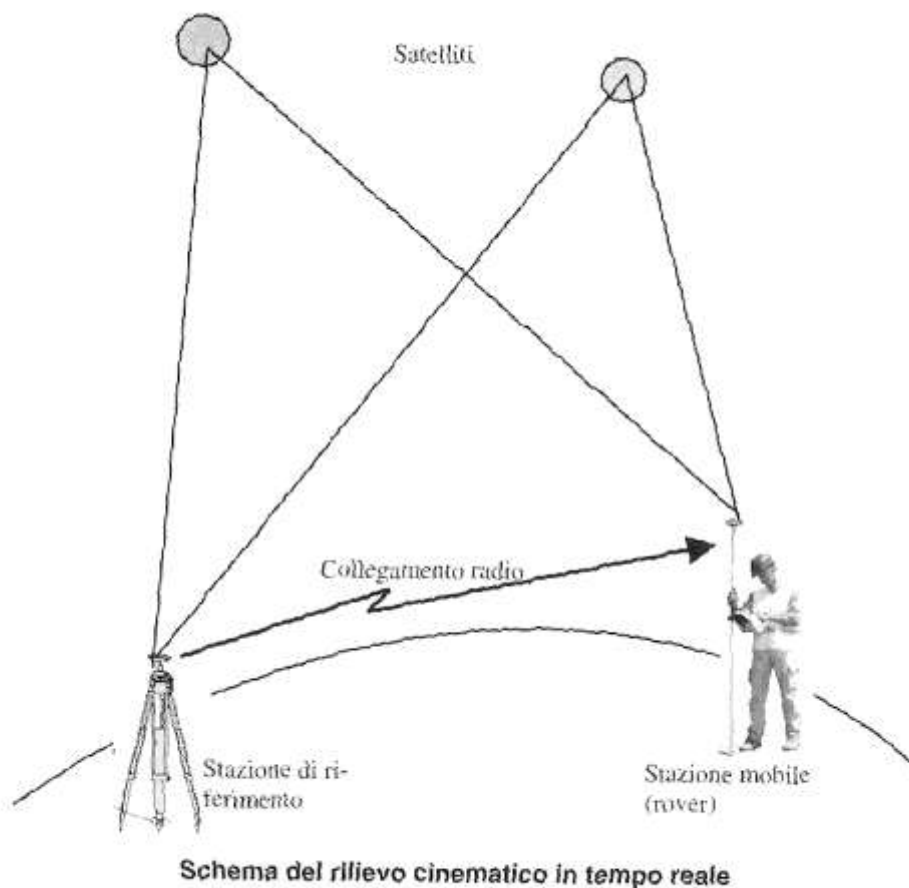


Fig. 1.42 - ricevitori GPS per osservazioni differenziali

Fig. 1.43 - Apparati riceventi GPS collegati da radio-modem per il rilievo (DGPS) cinematico in tempo reale (RTK)



Si possono distinguere in apparati *da navigazione* (solo codice) e in apparati *per misure di fase*. I primi (ricevitori isolati) operano misure del tempo di propagazione di un impulso (codice) trasmesso dal satellite (fig. 1.44) e risalgono quindi alla *distanza* Satellite-Antenna ricevente (pseudorange), mentre i secondi (impiegati in coppia – vedi fig. 1.42) utilizzano la misura dello sfasamento dell'onda portante e possono essere impiegati per definire la posizione relativa tra 2 punti di stazione.

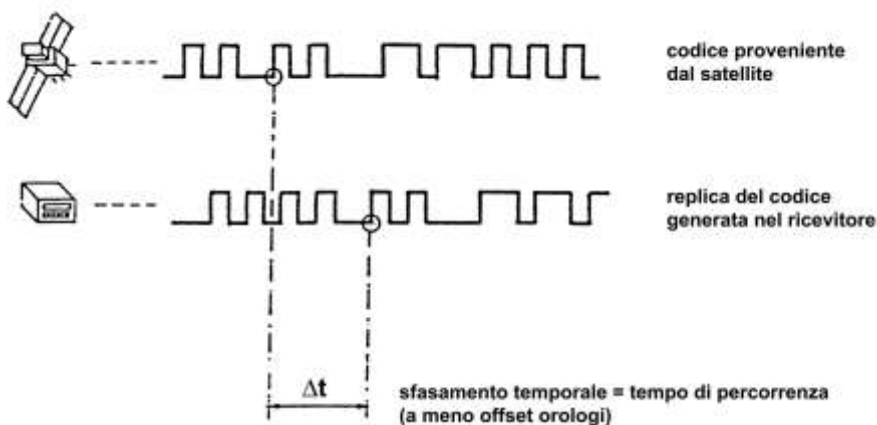


Fig. 1.44 - principio della misurazione di pseudorange

I ricevitori possono utilizzare una sola delle frequenze emesse dal satellite (monofrequenza) o più frequenze (doppia o tripla frequenza). La qualità dei risultati non è molto diversa, ma con i ricevitori in frequenza

multipla è possibile misurare distanze (baselines) maggiori di 10 Km (anche fino a 1000 Km) o operare misure in tempi più contenuti – fino alle misure in “tempo reale” di cui diremo poco oltre.

1.4.8.2 - Metodologie di misura

- *Pseudorange* - attraverso la misura del ritardo di un segnale emesso dal satellite, rispetto a quello analogo generato nel ricevitore, si può risalire alla pseudo distanza e, note almeno 3 distanze si può risalire alla posizione della ricevente (intersezione di tre sfere di centro noto), in realtà occorrono almeno 4 distanze perchè risulta incognito anche lo sfasamento tra il cronometro del ricevitore e quello del segmento spaziale. Le approssimazioni che si possono ottenere con questo sistema sono dell'ordine di circa 30 m con il codice C/A e di circa 5 m con quello P. Attualmente il metodo delle pseudo-distanze è impiegato quasi solo per la navigazione (marittima aerea ma anche terrestre...).

Ci sono anche apparati che consentono una correzione differenziale (mediante modem si collega il ricevitore a una stazione permanente o a un altro ricevitore che staziona su un punto noto) dei dati, e che portano alla precisione di circa un metro, ottenuta anche in tempo reale (oppure, senza modem in post-processing). A tale proposito si può citare il sistema Omnistar che diffonde i dati per la correzione differenziale tramite trasmissioni radio diffuse da satelliti geostazionari, basandosi sulle osservazioni GPS di una rete di stazioni di riferimento autonoma, giungendo a precisioni di $\pm 0.5 - \pm 1$ m.

- *fase* - la prassi operativa da seguire nelle determinazioni geodetiche e topografiche con il sistema GPS è quella del posizionamento differenziale. Essa comporta sempre l'impiego simultaneo di 2 apparati ricevitori, posti in stazione sugli estremi di una *baseline* prescelta, e disposti in modo da poter ricevere simultaneamente i segnali provenienti da almeno 4 satelliti (solitamente da 6 a 10). Il risultato delle operazioni di misura è una distanza orientata nello spazio cartesiano ellissocentrico (*baseline*) la cui precisione è dell'ordine di 10^{-6} (errore relativo), e quindi comparabile con quella ottenuta con i metodi di rilievo geodetico di massima precisione.

1.4.8.2 - Metodologie operative

Le modalità di misura possibili sono essenzialmente riconducibili a 5 schemi:

- metodo **statico** : è la procedura di misura più accurata e comporta lo stazionamento dei 2 ricevitori sui punti da determinare per un arco di tempo superiore ai 30' (fino a 24^h o più) . La precisione conseguibile è dell'ordine di ± 0.3 cm + 1 mm/Km (il secondo addendo viene applicato come fattore alla lunghezza della *baseline*). Di solito si impiegano 2 o più ricevitori doppia frequenza posti a distanze relative variabili tra 0 e 100 Km (i risultati migliori si ottengono con distanze di 5-30Km)

- metodo **statico rapido** (fast-static) : procedura di misura accurata che comporta lo stazionamento dei 2 ricevitori (anche monofrequenza) sui punti estremi della *baseline* per un arco di tempo variabile dai 5' ai 30' (di solito 80 *epoche* per i ricevitori doppia frequenza e 240 per quelli monofrequenza) anche in funzione del numero di satelliti ricevuti e dalla *diluizione* della precisione (PDOP – vedi paragrafi successivi). La precisione conseguibile è dell'ordine di ± 0.5 cm + 1 mm/Km e, se si impiegano ricevitori monofrequenza, la distanza utile non dovrebbe superare di molto i 10 Km.

- metodo **cinematico continuo**: si impiegano anche in questo caso due ricevitori GPS dei quali uno (Master) viene mantenuto fisso in stazione su un estremo delle *baselines*, mentre l'altro (rover) viene spostato sui punti da determinare (anche senza fermarsi). La precisione ottenibile è dell'ordine di $\pm 1-5$ cm + 1-5 mm/Km. Prima (o anche dopo) delle operazioni di misura è necessario *inizializzare* il rilievo, risolvere cioè la *ambiguità* sulla prima (o ultima) *baseline*, ciò può avvenire

con un rilievo statico rapido. Se, durante la sessione di lavoro, si verificano *cicle-slips* tali da diminuire il numero dei satelliti ricevuti contemporaneamente dai 2 apparati al di sotto di 4, deve essere ripetuta la *inizializzazione*.

- metodo **cinematico stop-and-go**: la precisione ottenibile risulta di circa $\pm 1\text{cm} + 1\text{mm/Km}$, e il ricevitore mobile (generalmente montato su palina), dopo una *inizializzazione*, staziona nei punti da determinare per il tempo indispensabile per le misure (10-30" ovvero 2-3 epoche). Anche in questo caso se il numero di satelliti ricevuti dai 2 apparati scende sotto il minimo di 4, si deve ripetere la *inizializzazione*, il che può avvenire anche ribattendo un punto già rilevato. Con gli apparati più moderni la *inizializzazione* può essere effettuata durante il rilievo, se questo ha una durata complessiva maggiore di 10-20', si parla in questo caso di *inizializzazione OTF* (On the fly = al volo). Una volta si utilizzavano metodi di *inizializzazione* rapidi (antenna swap) che prevedevano lo scambio di posizione dei due ricevitori posti in centramento forzato sugli estremi di una base (asta metallica) di lunghezza nota.

- metodo **cinematico in tempo reale (RTK)**: non differisce operativamente dal metodo stop and go, ma si devono impiegare ricevitori doppia frequenza; permette il calcolo delle coordinate (real time) degli estremi delle baselines tramite un collegamento radio tra le due stazioni riceventi e una elaborazione istantanea dei segnali (in circa 15" si hanno precisioni prossime a quelle del metodo statico rapido) con un controllo automatico della diluizione della precisione. Gli eventuali *cicle-slip* possono essere inoltre recuperati mediante una *inizializzazione* automatica (OTF) ottenendo così considerevoli incrementi di produttività. Sempre per questo motivo la *inizializzazione* iniziale del rilievo può essere omessa.

Recentemente le Regioni Italiane hanno attivato o stanno attivando reti di stazioni permanenti GNSS collegate tra di loro e in grado di diffondere un segnale di correzione differenziale di elevata qualità. In questo caso il metodo RTK può essere utilizzato con la massima produttività (tempi di *inizializzazione* minimi e precisioni ottimizzate) in qualunque punto del territorio regionale anche disponendo di un solo ricevitore (rover) dotato di un modem (solitamente collegato con un apparecchio telefonico mobile) per il collegamento alla rete.

1.4.8.4 - *Trattamento dei dati osservati* - Il risultato delle misure è costituito, come si è detto, dalle coordinate cartesiane ortogonali parziali riferite a un sistema ellissocentrico (vedi par. successivo) dei punti rilevati e la precisione può arrivare attualmente al di sotto del centimetro.

Per ricavare le coordinate dei punti rilevati col sistema GPS espresse nel sistema cartografico prescelto, sarà necessario procedere prima ad una trasformazione delle coordinate cartesiane ellissocentriche in coordinate alto-geografiche (latitudine, longitudine e quota ellissoide), e a trasferire poi (rototraslazione) questi valori sull'ellissoide *locale* (par.2.1) impiegato per la rappresentazione prescelta (DATUM).

Dalle coordinate geografiche così ottenute sarà infine agevole, attraverso le formule di corrispondenza (par. 2.2.1), ricavare le coordinate piane Nord e Est (X e Y) dei punti considerati. Per la determinazione della quota ortometrica dei punti medesimi, sarà necessario conoscere con precisione lo scostamento tra la superficie del geoide (fig.1.50) e quella dell'ellissoide locale. Sarà comunque opportuno, ai fini di un controllo dei dati ottenuti, inserire nei punti rilevati anche un congruo numero di punti noti. Le elaborazioni numeriche, un po' complesse (rototraslazioni piane o spaziali con o senza variazione di scala da 3 a 7 parametri, vedi par.1.4.8.8), vengono operate da programmi di calcolo, che eseguono anche la determinazione delle precisioni conseguite.

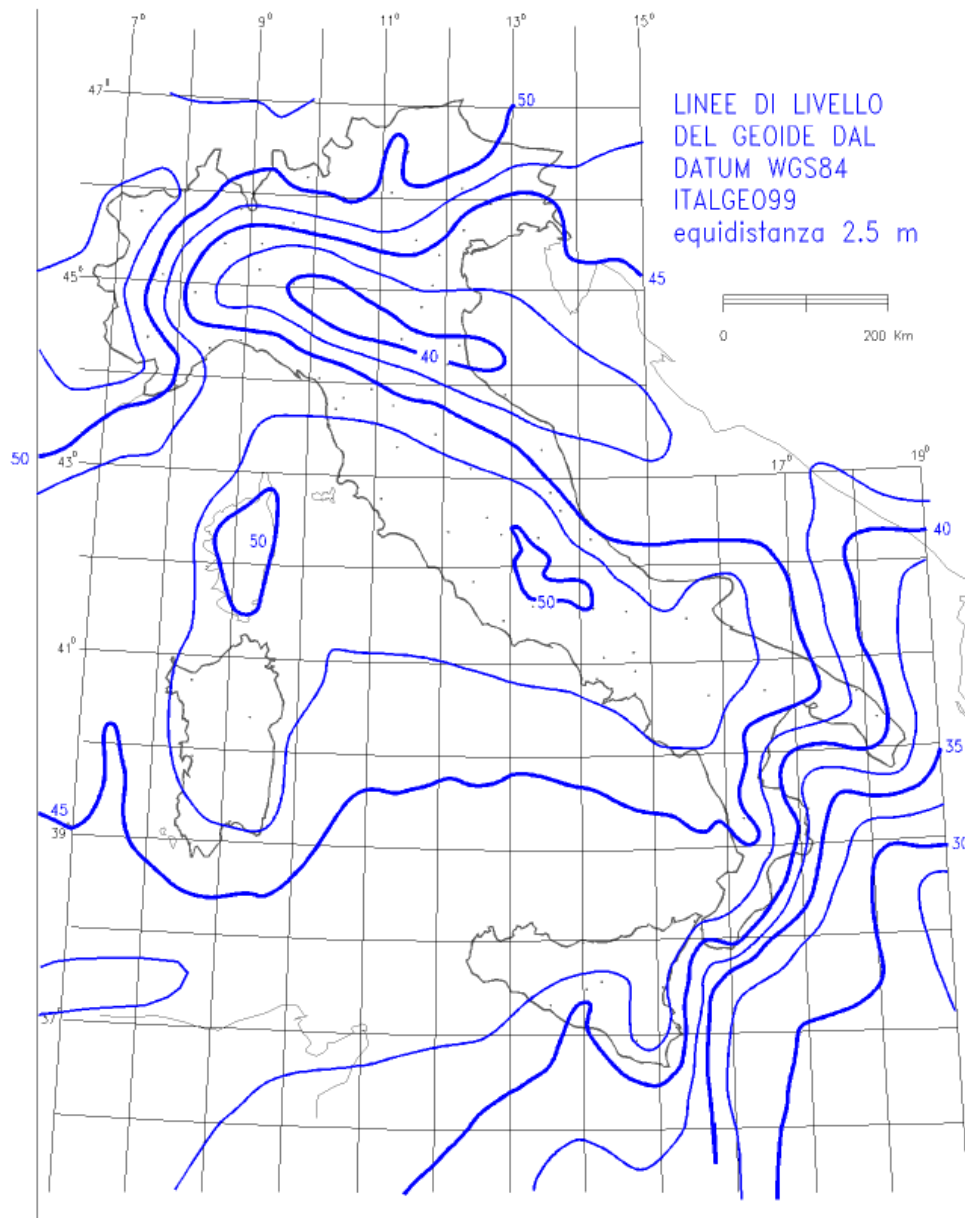


Fig. 1.50 - il geode italiano riferito al DATUM WGS84 – ETRF89 (ITALGEO99)

A tale proposito è importante segnalare la possibilità di impiegare i parametri di roto-traslazione forniti dall'IGM per tutti i vertici della rete IGM95 (vedi paragrafo successivo). Su richiesta IGM fornisce anche le correzioni altimetriche dei punti rilevati, per calcolarne le quote ortometriche (cioè riferite al geode). Anche il software Verto (distribuito sempre da IGM) consente il calcolo delle quote ortometriche e i passaggi di datum fra quelli globali e verso i principali sistemi cartografici nazionali e internazionali (G.B – UTM-ED50).

1.4.8.5 - i sistemi di riferimento del GPS

Recentemente si è esteso alla didattica e alla professione topografica anche un dibattito che da anni investe il mondo accademico e che riguarda i diversi sistemi di riferimento (DATUM) che si possono ottenere orientando l'ellissoide WGS84. L'orientamento di un ellissoide "globale" – tale cioè da essere utilizzato per l'intero globo terrestre – non può basarsi solo sulle misure di topografia astronomica e geodetica della deviazione della verticale operate in diversi punti tra loro collegati, in quanto questo è reso impossibile dalla separazione dei continenti. Si ricorre quindi a un complesso sistema di misure astrofisiche che qui non è possibile trattare – condotte e coordinate da dell'IERS (International Earth Rotation Service) in collaborazione con IGS (International GNSS Service) .

Il riferimento (i riferimenti come vedremo) determinato da IGS prende il nome ITRS. La definizione di ITRS pone il centro dell'ellissoide nel centro di gravità del pianeta e orientamento coincidente con quello determinato nel BIH (Bureau International del l'Heure) al tempo 1984.0.

Dato che il pianeta non ha un centro di gravità fisso e che l'asse di rotazione ha dei movimenti periodici noti – a anche altri meno noti – lo IERS determina e aggiorna nel tempo – con cadenza circa quinquennale - i datums ITRFyy da ITRF89 ($t_0=1984.0$) a ITRF2005 ($t_0=2005.0$).

Recentemente, visto il numero crescente di stazioni permanenti impiegate e vista anche la precisione che le elaborazioni hanno raggiunto, IGS ha realizzato per il sistema di riferimento ITRF2005 un computo "dinamico", aggiornato cioè settimanalmente rispetto a una posizione "iniziale" (2005.0) dando la quantificazione delle velocità medie di spostamento delle singole stazioni che compongono la rete (fig. 1.51).

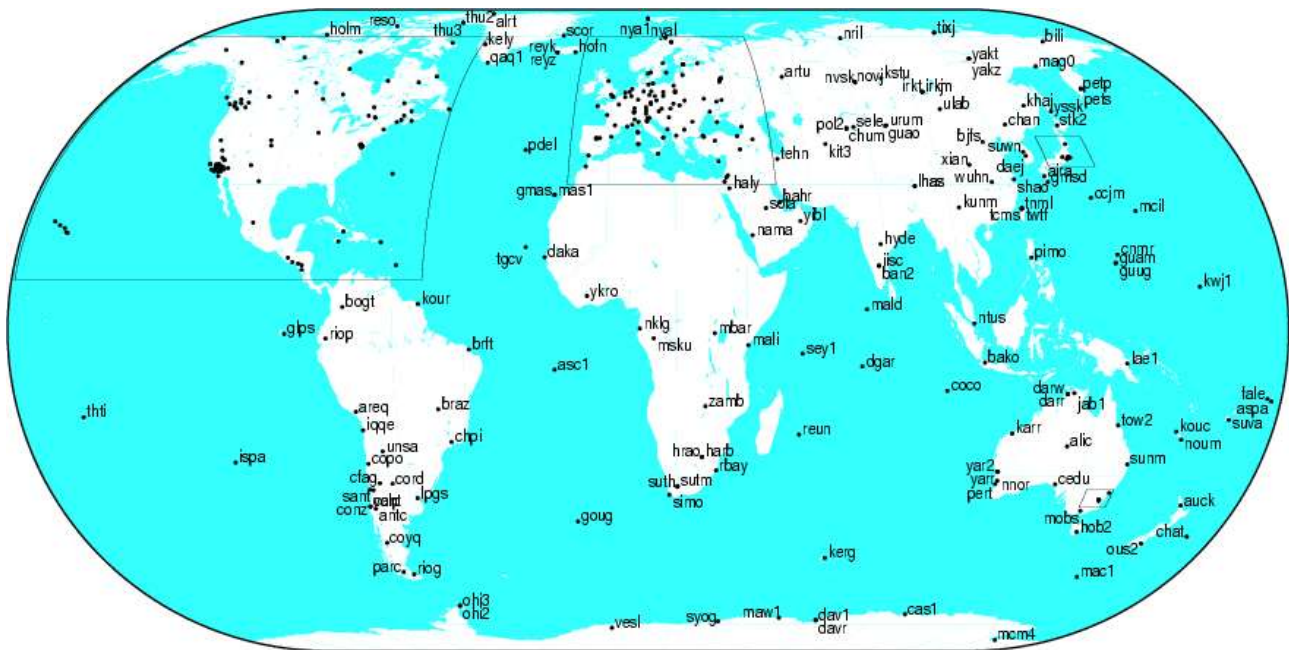


fig. 1.51 – le stazioni permanenti della rete IGS (dal sito <http://igs.cb.jpl.nasa.gov>)

Naturalmente fare riferimento a un sistema di coordinate nel quale i punti "fissi", cioè i capisaldi, si muovono... non è cosa semplice né sempre conveniente. Infatti solo per gli studi di geodinamica o di monitoraggio si giustificano le complessità derivanti dall'impiego del riferimento ITRF2005, nel quale – tra l'altro – vengono espresse le posizioni (effemeridi) dei satelliti del sistema GPS.

Se la richiesta di precisione nel posizionamento relativo dei punti di rilievo, rispetto alle stazioni fisse non risulta inferiore a qualche centimetro, le reti "statiche" possono essere impiegate con notevoli semplificazioni. La "vecchia" rete Italiana (IGM95) ad esempio impiegava il datum

triangolazioni – all’accumularsi degli errori di osservazione, ma piuttosto alle successive semplificazioni del problema geodinamico. Per rendersi conto dell’entità del problema, si riportano (fig. 1.53 e 1.54) i risultati delle elaborazioni settimanali relativi alla posizione della stazione di Prato (sulla copertura dei laboratori PIN) espressa nel riferimento ITRS2000 e in quello ETRS.

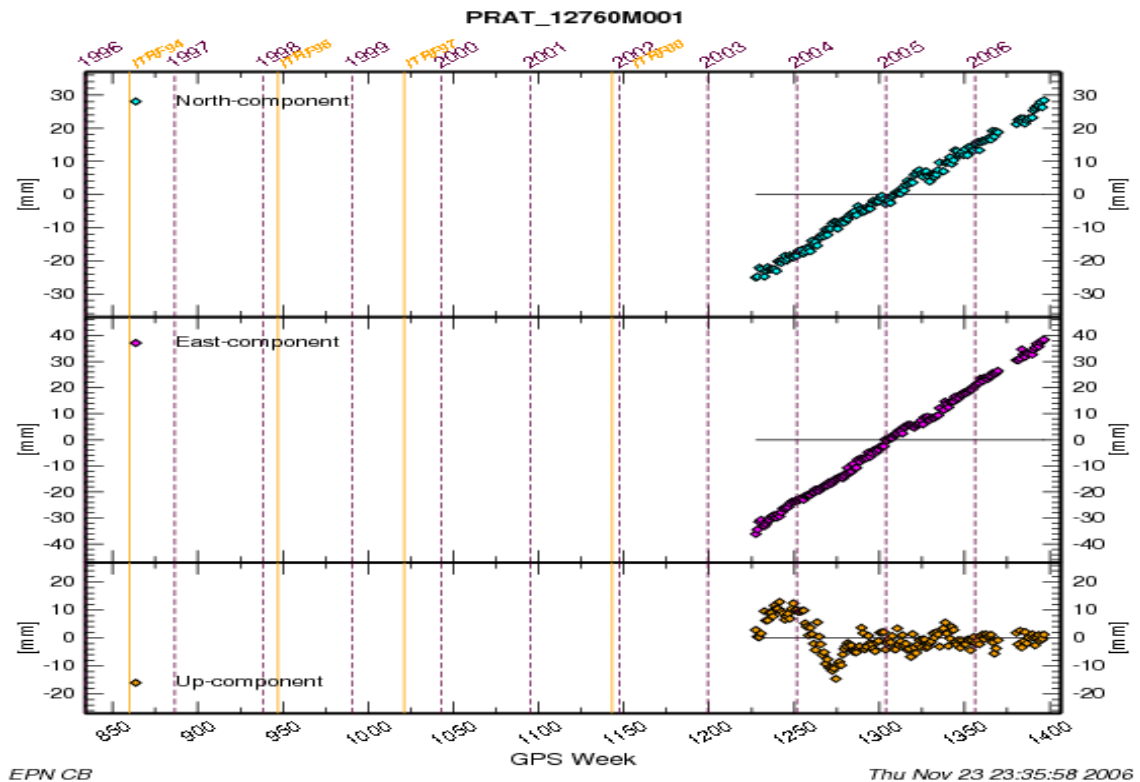
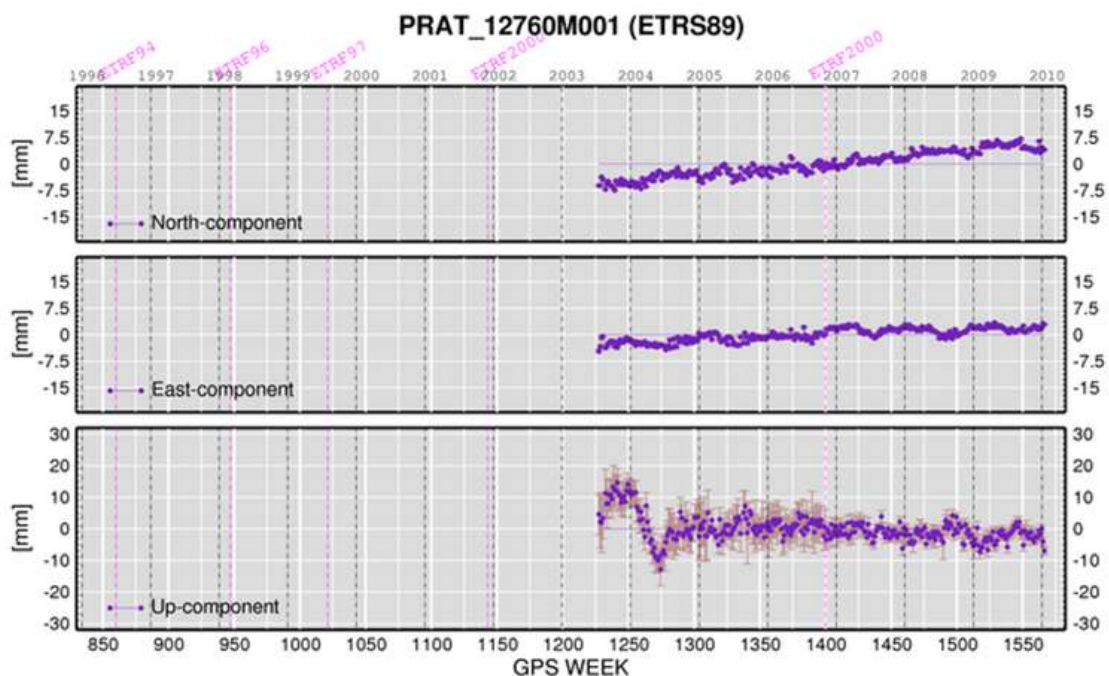


fig.1.53 – posizioni di PRAT nel riferimento ITRS2000

fig.1.54 – posizioni di PRAT nel riferimento ETRS89



come si vede, la situazione nel riferimento europeo ETRS è quasi statica (gli abbassamenti sono dovuti ai lavori di scavo del parcheggio interrato e della relativa rampa), mentre lo spostamento planimetrico nel sistema ITRS somma a quasi 20 mm/anno in Est e a più di 20 mm/anno in direzione Nord.

In questo contesto, al rete IGM95 (fig. 1.55) poteva risultare ancora affidabile per gli scopi cartografici, ma scarsamente applicabile per le misure di più alta precisione.

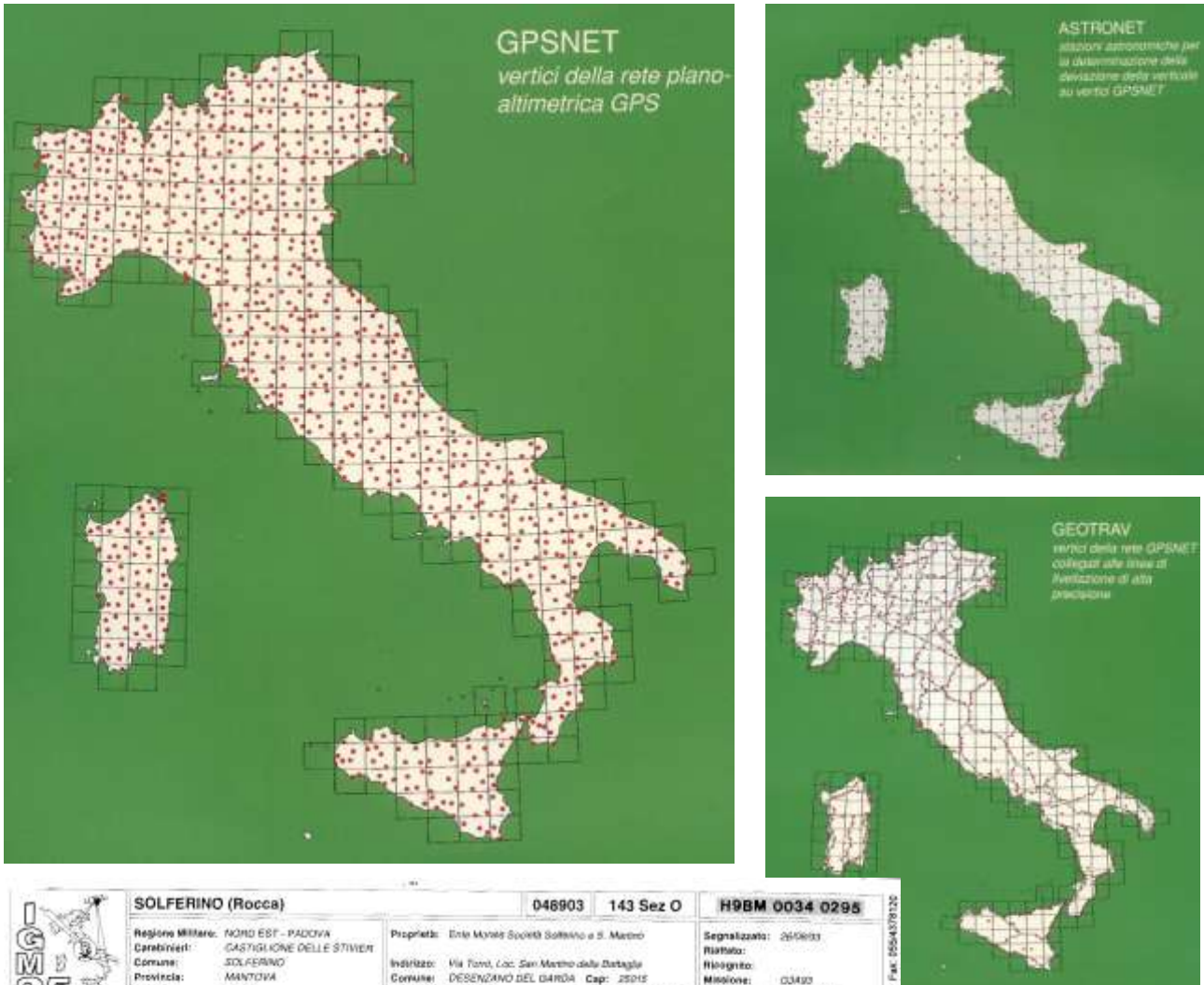


fig. 1.55 – la rete IGM95

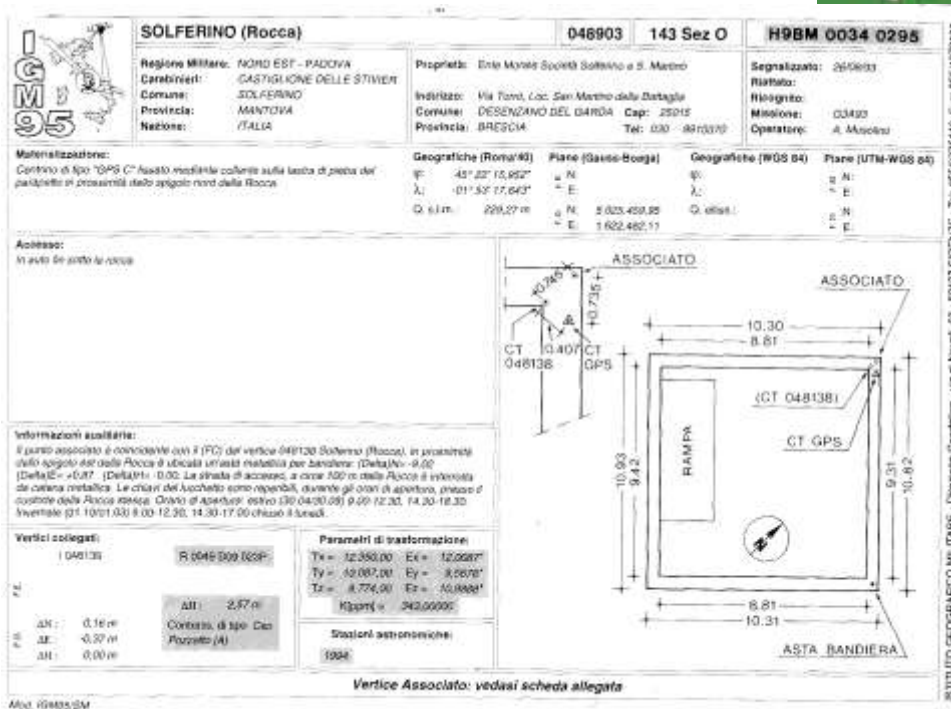




Fig. 1.56 – la nuova rete dinamica nazionale (RDN) realizzata da IGMI nel datum GRS80 - ETRS2000 (2008.0)

1.4.8.6 – Lo stato attuale delle misure satellitari

L'impiego dei sistemi di posizionamento satellitari (GNSS) si sta sempre più diffondendo in Italia e l'Istituto Geografico Militare ha stabilito nel 2000, con questo sistema, l'importante rete geodetica tridimensionale di base (IGM95-ETRS89 – figg. 1.55) composta da oltre 1100 vertici accessibili facilmente e stazionabili; anche il Catasto ha previsto l'impiego del GPS per il raffittimento e l'integrazione della rete catastale plano-altimetrica, redigendo un capitolato generale e consente l'impiego di questo sistema anche nelle determinazioni di dettaglio. Dal Gennaio 2010 è entrata in vigore la nuova rete dinamica nazionale (RDN in fig. 1.56) che adotta un datum più aggiornato ed è basata su un minor numero di stazioni (99) che però sono state determinate nella loro posizione "assoluta" (ITRS2005) e relativa con accuratezze adeguate (circa al mm nelle coordinate planimetriche e pochi mm in altezza). Si è proceduto anche al ricalcolo della rete IGM95 nel nuovo datum (ETRS2000 – 2008.0) per cui si può parlare della nuova rete come IGM95- ETRS2000-2008.0. Il passaggio tra le "vecchie" coordinate e le "nuove" di tutti i vertici IGM95 è implementato con una macro nel sito www.igmi.org – anche le nuove edizioni del software Verto consentono tali trasformazioni.

Inoltre è oramai più corretto – come già accennato) - parlare di GNSS (Global Navigation Satellite Systems) piuttosto che di GPS, in quanto il ripristino della rete ex-sovietica GLONASS GLOBAL NAVIGATION Satellite System – costituita da 18 satelliti operativi – sono previsti 24 entro la fine del 2010) e l'avvento della rete europea GALILEO (erano previsti 30 satelliti entro il 2011 – probabilmente dovremo aspettare un po' di più) rendono disponibili più satelliti, con codifiche, frequenze e riferimenti geodetici anche differenti (vedi tab.1.4.8.1), in questo contesto i ricevitori più recenti possono ricevere e interpretare i segnali di un maggior numero di satelliti anche appartenenti alle diverse "reti" permettendo uno sviluppo interessante sia sotto il profilo della precisione conseguita, sia sotto quello della maggior adattabilità (vedi poco oltre) alle diverse situazioni del rilievo.

tab.1.4.8.1 – principali caratteristiche dei sistemi satellitari

PARAMETRI	GLONASS	GPS
Numero di satelliti	24	24
Numero di orbite piane	3	6
Altezza orbite	19140 Km	20180 Km
Durata dell'orbita	11h 15m	11h 58m
Base di lancio	Baikonur	Cape Canaveral
Data primo lancio	2 ott 1982	22 feb 1978
Numero di satelliti per lancio	3	1
Frequenze	25 canali separati da 0.5625 MHz	Bandwith 20 MHz
L1	1602.5625 - 1615.5	1575.42
L2	1240 - 1260	1227.6
L5		1176.45
Orologio	Cesio	Cesio e rubidio
Precisione orologio	$5 \cdot 10^{-13}$	1 sec/30000 anni
Datum	PZ-90	WGS-84

1.4.8.7 – considerazioni critiche

I limiti operativi del rilievo satellitare sono da ricercare essenzialmente:

- nelle riflessioni ambientali (*multipath*), dovute ad es. alla presenza di edifici o di vegetazione nelle prossimità dei punti osservati,
- negli ostacoli che possono frapporsi nella ricezione dei segnali emessi dai satelliti in prossimità dei punti da rilevare o anche solo nelle vicinanze di passaggi obbligati (sottopassi, vegetazione alta e fitta, edifici alti o con sporgenze, tunnel, ecc.),
- nella presenza in zona di campi elettromagnetici creati da elettrodotti o emittenti che, operando su frequenze molto prossime a quelle dei sistemi, possono interferire nella captazione dei segnali;
- nel numero di satelliti (rigorosamente sempre maggiore o eguale a 4) che sono presenti nell'orizzonte di libera ricezione (vedi sky-plot in fig.1.57) e dalla disposizione dei satelliti stessi, che genera variazioni sensibili della *diluizione di precisione* (DOP in fig.1.57), un parametro che sintetizza le condizioni per avere un rilievo di adeguata precisione e che è tanto più favorevole, quanto più assume valori bassi (dovrebbe risultare inferiore a 6 per i rilievi statici e inferiore a 4 per quelli cinematici).

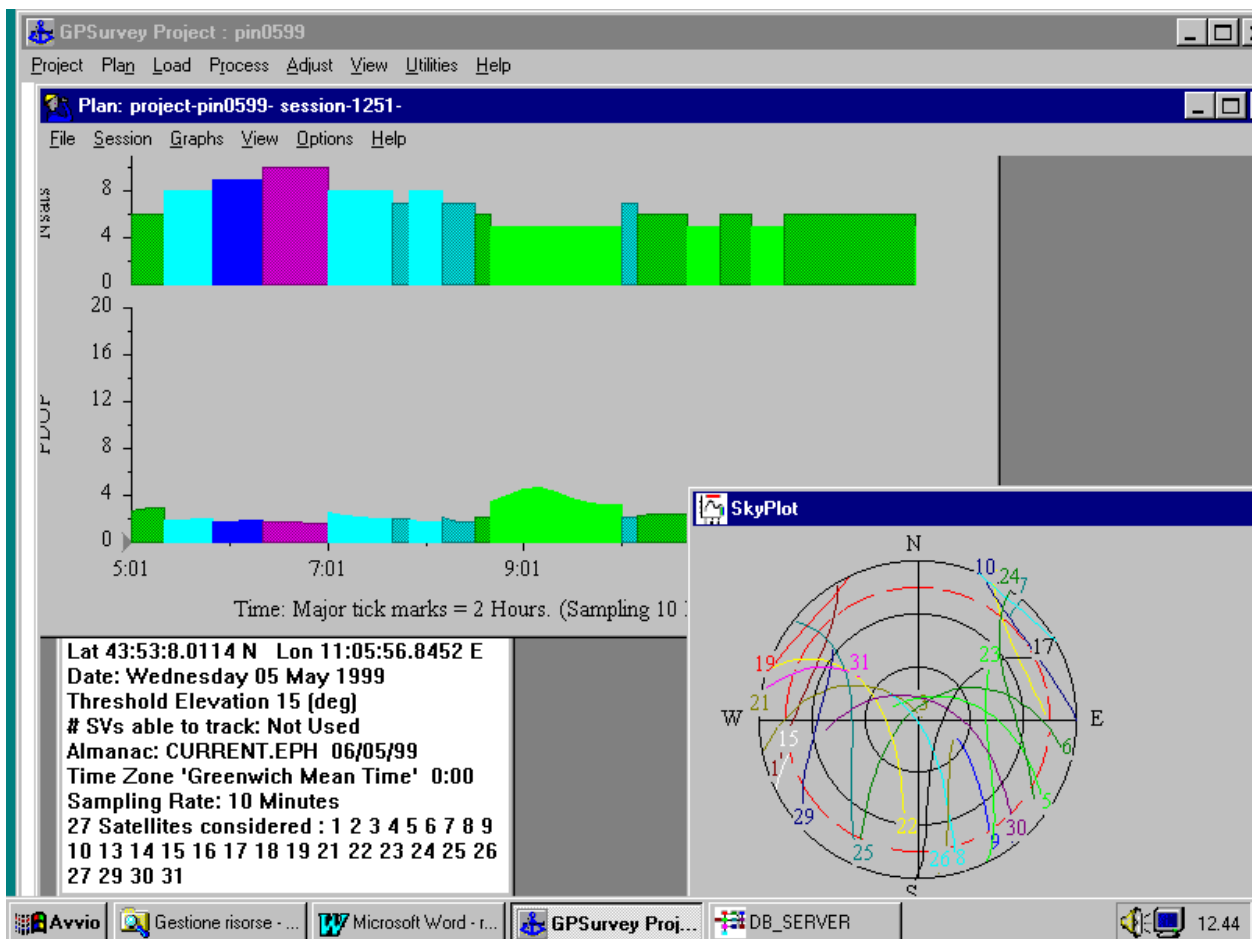


fig.1.57– skyplot e grafici relativi alla diluizione della precisione (PDOP) che si può ottenere in un intervallo di tempo in funzione del numero di satelliti previsti e della loro collocazione.

A tutto ciò dobbiamo adesso aggiungere i problemi indotti dalla diffusione delle reti “dinamiche”, nelle quali le coordinate dei punti noti sono definite con riferimento a una data precisa (es. 2008.0 per RDN) e vengono fornite anche le velocità medie (in m/anno) nelle 3 componenti cartesiane ellissocentriche, in modo che l’utente possa calcolare la posizione “aggiornata” dei punti noti suddetti, rispetto ai quali le tecniche differenziali geodetiche daranno la posizione dei punti rilevati.

Nei rilievi di massima precisione, si raccomanda:

- l’impiego del datum ITRF dinamico più recente (ad oggi ITRF2005) aggiornato all’epoca corrente e il calcolo delle baselines in coordinate ellissocentriche cartesiane
- la trasformazione delle coordinate cartesiane da ITRF a ETRF all’epoca corrente mediante parametri di calcolo ricavati dal sito IERS (roto-traslazione)
- il riporto al to sottraendo i prodotti velocità per tempo nelle tre componenti XYZ
- la trasformazione in coordinate alto-geografiche (vedi paragrafo successivo)
- la trasformazione in coordinate piane dei punti rilevati mediante le formule cartografiche.

Tale complessità scoraggerebbe evidentemente la massima parte degli utenti, per cui – salvo il fastidio indotto dagli aggiornamenti periodici (che però potrebbero avere una scadenza circa decennale), per le applicazioni topografiche e cartografiche ordinarie (precisioni assolute nell’ordine del centimetro o poco più) è sufficiente mantenere il riferimento ETRF riferito al to come base di calcolo.

Resta il problema della posizione differenziale determinata con le reti locali in modalità RTK, nel caso non sia identificato univocamente il datum impiegato per dare la posizione dei nodi della rete ad es. Italpos ha variato il riferimento – da ETRS89 a ETRF2000 – da 8 Luglio 2009, altre reti regionali si stanno orientando in questa direzione, ma sussiste una certa eterogeneità.

1.4.8.8 – *formule di trasformazione* (dal contributo di Luciano Surace – Boll.SIFET 1/02)

PASSAGGIO DA COORDINATE ELLISSOIDICHE (φ, λ, H) A CARTESIANE ELLISSOCENTRICHE (X, Y, Z)

Con gli stessi simboli già descritti, e posto:

H = quota ellissoidica

Problema diretto

$$X = (N + H) \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y = (N + H) \cos \varphi \cdot \sin \lambda$$

$$Z = [N(1 - e^2) + H] \sin \varphi$$

Problema inverso

$$\varphi = \arctan \frac{Z + (e^2) \cdot b \cdot \sin^2 \varphi}{P - e^2 \cdot a_0 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X} \quad H = \frac{P}{\cos \varphi} - N$$

con:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\psi = \arctan \frac{Z \cdot a_0}{P \cdot b}$$

FORMULE DI MOLODENSKIY A SETTE PARAMETRI PER IL PASSAGGIO FRA SISTEMI DI RIFERIMENTO

Essendo:

- $D\varphi, D\lambda, DH$ le differenze da sommare alle coordinate del punto nel sistema **G** per passare al sistema **L**;
- X_L^G, Y_L^G, Z_L^G i 3 parametri che esprimono le traslazioni;
- E_x, E_y, E_z i 3 parametri che esprimono le rotazioni;
- K il parametro che esprime il fattore di scala;
- φ, λ, H le coordinate del punto nel sistema **G**;
- a, e^2 i parametri dell'ellissoide del sistema **G**;
- ρ, N i raggi di curvatura dell'ellissoide del sistema **G** calcolati nel punto;
- da, de^2 le differenze fra i valori dei parametri dei due ellipsoidi (**L** - **G**);

Si ha:

$$D\varphi = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \lambda}{\rho + H} X_L^G + \frac{\sin \varphi \cdot \sin \lambda}{\rho + H} Y_L^G - \frac{\cos \varphi}{\rho + H} Z_L^G + \frac{a^2 / N + H}{\rho + H} \sin \lambda \cdot E_x -$$

$$- \frac{a^2 / N + H}{\rho + H} \cos \lambda \cdot E_y + \frac{e^2 \cdot N}{\rho + H} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \left(K + \frac{da}{a} \right) +$$

$$+ \frac{\rho + (1 - e^2) \cdot N}{\rho + H} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \frac{de^2}{2(1 - e^2)}$$

$$D\lambda = \frac{\sin \lambda}{(N + H) \cos \varphi} X_L^G + \frac{\cos \lambda}{(N + H) \cos \varphi} Y_L^G - \frac{(1 - e^2) \cdot N + H}{\rho + H} \tan \varphi \cdot \cos \lambda \cdot E_x -$$

$$- \frac{(1 - e^2) \cdot N + H}{\rho + H} \tan \varphi \cdot \sin \lambda \cdot E_y - E_z$$

$$DH = -\cos \varphi \cdot \cos \lambda \cdot X_L^G - \cos \varphi \cdot \sin \lambda \cdot Y_L^G - \sin \varphi \cdot Z_L^G + e^2 \cdot N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \cdot E_x -$$

$$- e^2 \cdot N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \cdot E_y - (a^2 / N + H) K - \frac{a}{N} da + (1 - e^2) N \cdot \sin^2 \varphi \cdot \frac{de^2}{2(1 - e^2)}$$